Antikens universum

Sten Kaijser

Uppsala Universitet

Inledning. Detta specialarbete har fyra syften. Det första är att ge en allmän orientering om antikens och medeltidens världsbild, främst för att visa att denna var mycket mer utvecklad än vad vi normalt tror. Det andra är att visa hur antikens matematiker med enkel geometri (t.o.m. nästan utan trigonometri) och primitiva mätinstrument beräknade jordens och solsystemets mått genom att låta eleven utföra beräkningarna, och därigenom själv ta reda på hur stort antikens vetenskapsmän trodde att universum var. Det tredje syftet är att jämföra antikens föreställningar med våra, genom att låta eleven utföra liknande beräkningar med de siffror som dagens vetenskap erbjuder. Det ingår i förutsättningarna för arbetet att eleven endast behöver använda matematik som var känd i Alexandria 200 år före kristi födelse. Det fjärde och sista syftet är att framföra det enkla budskapet: *Den som är beredd att räkna kan alltid ta reda på saker själv, t.o.m. hur många atomer som ryms i universum.*

Den medeltida världsbilden. När vi läser om Columbus resa över Atlanten ges vi ofta intrycket av att han ensam trodde att jorden var rund, medan alla andra trodde att den var platt. Dessutom antyds det att sjömännen varje dag väntade på att nå fram till världens kant där de skulle trilla av och därmed hamna i helvetet.

Det enda som är riktigt i den bild av Columbus som jag antydde ovan, är att *han* trodde att jorden var rund. Men det trodde naturligtvis också Ferdinand och Isabella som utrustade hans skepp, och det trodde även hans sjömän, ja i själva verket trodde varenda vettig människa att jorden var rund — åtminstone om vi med vettig människa menar ”bildat folk”, sjöfolk och några till. Och redan då var idén att jorden var rund nära tvåtusen år gammal. De som först framförde tanken var *pythagoréerna*, d.v.s. medlemmarna av den rörelse som Pythagoras (han med satsen) grundade. Pythagoréerna ansåg att cirkeln är den fulländade geometriska figuren och att klotet är den fulländade kroppen. Av religiösa skäl ansåg de därför att alla himlakropparna var klot som rörde sig på cirklar över det sfäriska himlavalvet. Pythagoréernas ursprungliga tanke var att solen liksom månen lyste med lånat ljus, och att ljuskällan för alla himlakroppar var ”centralelden” i universums medelpunkt. Att vi aldrig får se denna eld beror på att jorden alltid vänder ”ryggen” mot den. Denna ”rygg” på jorden är därmed också obeboelig på grund av värmen. Så småningom utvecklades Pythagoréernas världsbild därhän att jorden placerades orörlig i världens medelpunkt, medan alla himlakropparna, sol, måne, planeter och fixstjärnor satt fast på sfärer som på sinnrika sätt snurrade runt den orörliga (men fortfarande runda) jorden. Att fixstjärnorna befann sig på en sfär som roterade runt en axel som sträckte sig från polstjärnan i norr till en okänd punkt långt nere i söder var ju inte så svårt att se. Solen var något svårare men dess rörelse är ändå så pass regelbunden att tar man bara hänsyn till ekliptikan så kan även dess rörelse förstås. Värre var det med himlens luffare, planeterna (ja, själva ordet planet kommer faktiskt från ett grekiskt ord för luffare). Den djupt religöse, och av pythagoréerna inspirerade, Platon var övertygad om att även planetbanorna kunde beskrivas med hjälp av cirklar och/eller sfärer. Han uppmanade därför sin tids matematiker att skapa ordning bland himlakropparna genom att finna de cirklar som beskrev rörelserna. Den som löste problemet (åtminstone tillfälligt) var EUDOXUS (som faktiskt var verksam hos Platon vid dennes skola *Akademin* i Aten). Eudoxus visade att man kunde tänka sig sfärer kopplade innanför varandra som alla roterar med varandra med konstanta rotationshastigheter och som tillsammans väl beskriver himlakropparnas rörelser. Denna idé övertogs av ARISTOTELES som dock inte ville ha *tänkta sfärer* utan som istället gjorde dem materiella. Eudoxus' *tänkta axlar* blev också i Aristoteles' modell till verkliga fysiska axlar. Aristoteles' och Eudoxus' modell för himlakropparna stog sig i något hundratal år, ända tills grekerna efter Alexander den stores fälttåg fick del av babyloniernas månghundraåriga observationer.

Efter Alexanders död blev Alexandria centrum i den vetenskapliga världen. Där satt EUKLIDES och skrev sin Elementa (den lärobok i geometri som sedan användes i över två tusen år) och där lärde sig ARKIMEDES matematikens grunder. En i Alexandria verksam matematiker som gav två viktiga bidrag till den matematiska beskrivningen av solsystemet var APOLLONIUS (från Perga). Den för framtiden viktigaste insatsen var naturligtvis utarbetandet av den teori för kägelsnitten, d.v.s. ellipser, parabler och hyperbler som blev underlaget för Keplers arbete i början av 1600-talet. Men den idé som fick omedelbar tillämpning var införandet av epicykler vilket kan betraktas som det första försöket att beskriva (nästan) periodiska förlopp med (nästan) Fourierserier. Modellen är att planeten rör sig på en (liten) cirkel, epicykeln, vars centrum rör sig på en cirkel runt jorden. Den stora cirkeln har därvid en omloppstid som svarar mot planetens rörelse (runt solen som vi nu ser det) och den lilla cirkeln har en omloppstid som svarar mot ett jordiskt år.[1]Modellen utvecklades ytterligare genom att medelpunkten för den stora cirkeln

[1]Detta gäller för de yttre planeterna, för de inre har den större cirkeln jordåret som omloppstid medan epicykeln svarar mot planetåret.

inte nödvändigtvis var jorden. Därigenom erhöll man ett system med inte mindre än fyra *frihetsgrader*, nämligen centrum för en *excentrisk stor cirkel*, radien i denna, samt radien i epicykeln. Därigenom kunde de alexandrinska astronomerna Hipparchos och Ptolemaios utarbeta en beskrivning av stjärnhimlen som stod sig i ett och ett halvt årtusende.

Vi som sedan snart fyrahundra år levt i Keplers och Newtons solsystem med solen i centrum föreställer oss ett geocentriskt system (med jorden i centrum), som oerhört primitivt. Vi bör dock komma ihåg att grekernas astronomiska instrument inte tillät några andra observationer än vinkelmätningar — de hade inte ens tillgång till de enklaste kikare. Den moderna tidens utveckling av astronomin beror framför allt på tekniska förbättringar av astronomernas observatorier. Ett faktum är att med endast vinkelmätningar är det matematiskt möjligt att beskriva universum geocentriskt med en *fixstjärnesfär* som universums yttersta gräns.

Det finns dock två himlakroppar som påverkar oss mer än några andra, nämligen solen och månen. Båda dessa befinner sig tillräckligt nära jorden för att uppta en mätbar bråkdel av synfältet. Båda upptar normalt cirka 30 bågminuter, d.v.s. en halv grad. Därigenom får vi för båda ett förhållande mellan avståndet och diametern.

Uppgift 1. Beräkna förhållandet mellan månens diameter och avståndet till månen om månens vinkel på himlen är exakt en halv grad.

Att månen och solen upptar ungefär samma vinkel kan man inse om man vet att då månen är som närmast jorden blir en eventuell solförmörkelse total, medan då månen är som längst från jorden blir en eventuell solförmörkelse endast partiell.

Aristarchos från Samos. För den astronomiskt obevandrade finns det inget självklart samband mellan solförmörkelser och månen.

(Skuggsidan av månen syns ju naturligtvis inte alls på dagen när en eventuell solförmörkelse inträffar!) Nu var inte de alexandrinska astronomerna och matematikerna på något sätt astronomiskt obevandrade. De höll mycket noga reda på solens och månens inbördes positioner och förstod därför mycket väl dels att månen lyste med lånat ljus, dels månens faser och även sol– och månförmörkelser. Med utgångspunkt från månens faser kan man också räkna ut det relativa förhållandet mellan avstånden till månen och avståndet till solen. Den som först lär ha gjort ett försök att beräkna detta förhållande var ARISTARCHOS från Samos. Aristarchos' idé var att utgå ifrån halvmånen. Resonemanget är ju enkelt — när månen är exakt halv så utgör ju solen, jorden och månen hörn i en rätvinklig triangel med den räta vinkeln i månen. Kan vi därför mäta vinkeln mellan månen och solen så kan vi räkna ut hur mycket längre det är till solen än till månen.

UPPGIFT 2. a) Aristarchos uppmätte vinkeln till *en rät vinkel minus en trettiondel av en rät vinkel.* Hur många gånger större än månen trodde Aristarchos att solen var?
b) I själva verket är solens diameter ungefär 400 gånger större än månens. Vilken vinkel (uttryckt i grader och minuter) borde Aristarchos därför ha uppmätt?

Den fråga som egentligen intresserade Aristarchos mer än avstånden var dock den relativa storleken av solen och månen i förhållande till jorden. Eftersom han redan visste (eller trodde sig åtminstone veta) förhållandet mellan solen och månen räckte det därför att beräkna förhållandet mellan jorden och månen. För att beräkna detta avstånd använde sig Aristarchos av månförmörkelserna. Aristarchos utgångspunkt var det enkla faktum att det finns totala månförmörkelser. Om man förutsätter att avståndet till solen är mycket större än avståndet till månen så att månens avstånd till solen kan betraktas som konstant så inser man lätt att månen är högst hälften så stor som jorden. Nu är månen i själva verket mindre än så vilket medför att en total månförden tid som en månförmörsom förmörkelsen tar så kunde Aristarchos beräkna hur stor jordskuggan är på månens avstånd. Eftersom jordens diameter är ungefär jordskuggans diameter + en måndiameter kunde han därigenom beräkna förhållandet mellan jordens och månens diametrar. I detta sammanhang bör det påpekas att *månförmörkelser* kan ses antingen ur ett jordiskt perspektiv (d.v.s. som månförmörkelser) eller ur ett månperspektiv (som förmörkelser av solen). Står vi på månen så börjar förmörkelsen (för oss) i det ögonblick som jorden börjar skymma solen, och den blir total när vi kommer in i jordens *kärnskugga.* Står vi på jorden börjar inte månförmörkelsen förrän någon del av månen börjar komma in i kärnskuggan och den är total när hela månen befinner sig i kärnskuggan. I nedanstående uppgift ses allt ur ett jordiskt perspektiv, d.v.s. förmörkelsen varar endast medan någon del av månen befinner sig i kärnskuggan.

Uppgift 3. a) Antag att månförmörkelsen är total under halva tiden. Hur stor är då jordskuggan i förhållande till månen?

b) Visa med figur varför jordens diameter är summan av jordskuggans och månens diametrar. (Detta beror på att avståndet till solen är så stort att avståndet är detsamma antingen det uppmäts från jorden eller från månen, och på att solen och månen upptar samma vinkel på himlen.)

c) Hur många gånger större än månen är jorden enligt dessa beräkningar?

d) Hur många gånger större än jorden var i så fall solen (enligt Aristarchos' beräkning)?

e) Vilken vinkel upptar jorden sedd från månen?

f) Ta reda på de rätta förhållandena mellan storlekarna av jorden

och månen och använd dessa för att beräkna under hur stor del av en månförmörkelse som förmörkelsen är total (Du får förutsätta att månen rör sig i en cirkel runt jorden och att månens centrum passerar genom centrum för kärnskuggan). Vad ger detta värde för svar på c) och e)?
g) Vad får vi för svar på fråga d) om vi även antar att förhållandet mellan solens och månens diametrar är 400?

Som framgår av uppgift 3 kunde Aristarchos räkna ut att solen var många gånger större än jorden. En anledning till att Aristarchos inte "vågade" anta att hans vinkel var ännu större var förmodligen att hans resultat var alldeles för fantastiskt redan som det var. Skulle han ha räknat ut att solen var ungefär 100 gånger större än jorden skulle absolut ingen ha trott honom. (Före Aristarchos trodde de djärvaste att solen kanske var större än Peloponesos!)

Trots att Aristarchos grovt underskattade solens storlek räknade han ju ändå ut att den var mycket större än jorden och han drog därav den naturliga slutsatsen: *Jorden kretsar runt solen!*

Som Aristarchos anat var det inte många som trodde honom, och det blev den geocentriska världsbilden som förblev förhärskande under hela antiken och medeltiden. Dock fanns Aristarchos' arbete bevarat och både Hipparchos och Ptolemaios nämner Aristarchos' teori om att jorden kretsar kring solen.

Erathostenes. För att återgå till Columbus tro att jorden var rund, så var detta trots allt den "akademiska världens" övertygelse alltifrån Platons och Aristoteles' Aten på 300-talet f.Kr. Utifrån denna övertygelse hade man också beräknat Jordens storlek. Uppskattningen hade gjorts av ERATHOSTENES i Alexandria. Hans beräkning utgick ifrån två kända data, varvid den väsentligaste var *brunnen i Syene* (nuvarande Assuan). I Syene fanns det en djup brunn där solen en gång om året, nämligen vid Zenit på midsommardagen, kunde lysa ända ner i botten. Erathostenes antog att Alexandria låg rakt norr om Syene och eftersom han kände till avståndet mellan de två städerna, så mätte han helt enkelt solhöjden i Alexandria vid samma tidpunkt.

Uppgift 4. Antag att Alexandria ligger på $31^\circ\,27'$ och att Syene ligger exakt på Kräftans vändkrets $23^\circ\,27'$. Antag vidare att Erathostenes' antagande om att Alexandria ligger rakt norr om Syene är riktigt. Om vi förutsätter att Erathostenes' beräkning av jordens omkrets var exakt och att avståndet mellan Alexandria och Syene var 5000 stadier, hur lång var då en stadion?[2]

Uppgift 5. Om man kombinerar uppgift 3 e) (eller f))med Erathostenes' beräkning av jordens storlek kan man beräkna avståndet från jorden till månen. Gör detta.

Som vi såg ovan så var Aristarchos' och Erathostenes' mätningar och därpå grundade beräkningar tillfredsställande utom vad gäller vinkeln mellan solen och månen vid halvmåne. Detta är också den känsligaste mätningen. Svårigheten är främst att avgöra när månen är exakt halv. Ett sätt att förbättra noggrannheten i mätningar är det som används vid laborationer, nämligen att utföra mätningen flera gånger och sedan bilda ett medelvärde. Ett av Aristarchos' problem var också att han utförde sina beräkningar innan trigonometrin hade utvecklats. Detta innebar dels att han inte kunde beräkna vinkeln vid månen, utom då vinkeln var 90°, dels att han även om han kunnat beräkna vinkeln vid andra faser inte hade kunnat beräkna förhållandet mellan sidorna i triangeln sol, jord och måne ändå.

[2]Erathostenes' förutsättningar gällde inte exakt. Syene ligger något norr om Kräftans vändkrets, på 24^o nordlig bredd och Alexandria ligger något väster om Syene. Dessutom finns det olika uppgifter om längden av en Stadion. Den för Erathostenes gynnsammaste längden av en stadion ger dock ett fel på jordens omkrets som är mindre än 100 km.

UPPGIFT 6. Ange hur du skulle bära dig åt för att beräkna vinkeln vid månen och därmed också förhållandet mellan sidorna då månen inte är exakt halv. (Du skulle t.ex. kunna använda månens *höjd* och *bredd*.)

Arkimedes. Aristarchos' och Erathostenes' beräkningar användes av ARKIMEDES som inleder det berömda arbetet *SANDRÄKNAREN* med att uppskatta hela universums storlek. I detta arbete förutsätter Arkimedes att universum är inneslutet i en stor sfär – fixstjärnesfären – och han gör en beräkning av radien i denna sfär. I sina beräkningar förutsätter Arkimedes att kvoten mellan fixstjärnesfärens radie R och avståndet r mellan jorden och solen är lika stor som kvoten mellan r och jordens radie j, d.v.s. han antog att ekvationen $R/r = r/j$ gällde. Nu vet ju vi att Erathostenes' beräkning (av j) låg nära det rätta värdet, medan Aristarchos grovt underskattade r. Det visste visserligen inte Arkimedes men han garderade sig genom att anta att jordens storlek var 10 gånger större än vad Erathostenes hade beräknat och avståndet till solen var en och en halv gång större än vad Aristarchos trodde.
UPPGIFT 7. a) Vad fick Arkimedes för uppskattning av fixstjärnesfärens radie R?
b) Ta reda på hur stort astronomerna idag anser universum vara.

Det egentliga syftet med Arkimedes' arbete var dock inte att beskriva universum utan att skriva stora tal. I Sandräknaren fortsätter Arkimedes därför med att namnge och beskriva allt större tal. Han är inte nöjd förrän han beskrivit ett tal som vi numera skulle skriva som en etta med 80.000 biljoner nollor efter sig eller något kortare $10^{8 \cdot 10^{16}}$. Sedan han beskrivit sina stora tal så beräknar han antalet sandkorn som skulle få plats innanför fixstjärnesfären och visar att detta är ett litet pluttetal i jämförelse med de verkligt stora talen som han beskrivit. (Anm. Det bör påpekas att positionssystemet inte var uppfunnet på Arkimedes' tid och att det största tal som hade ett namn var talet 10.000 som kallades en *myriad*.)

Uppgift 8. a) Arkimedes antog att ett sandkorn hade en diameter om ungefär en halv millimeter. Hur många sandkorn fick han plats med?

b) Om en atom antas ha radien 1 Ångström = 10^{-10} meter, hur många atomer får vi plats med i Arkimedes' universum och i vårt?

Uppgift 9. Läs i en uppslagsbok eller liknande om någon eller några av de matematiker och astronomer som formade antikens och medeltidens världsuppfattning och ta reda på mer om dem och om vad de gjorde. De intressantaste personerna är Arkimedes, Pythagoras, Aristarchos, Platon, Aristoteles och Eudoxos.

För att avsluta där jag började så vill jag tala om att den verkliga orsaken till att Columbus vågade sig ut på sin resa var att han hade hört om en ny uppskattning av jordens omkrets som bara var en tredjedel av Erathostenes. Amerikas upptäckt beror alltså i själva verket på en felräkning!

Litteratur

1. I *Sigma band 1* finns Arkimedes' uppsats Sandräknaren översatt.

2. Sinnerstad, U., *Från stjärnskådning till rymdforskning.* Doxa, Lund 1985, (Om astronomins historia).

3. Kline, M., *Matematiken i den Västerländska Kulturen.* Prisma, Stockholm 1968.

Morris Kline har skrivt flera läsvärda böcker om matematikens historia och dess roll i västerlandets utveckling. De övriga böckerna finns dock endast på engelska.

4. Hawking, S., *Kosmos, en kort historik*. Prisma 1988.