Frankering og computer-nettverk

Øystein J. Rødseth

Universitetet i Bergen

Beskrivelse av oppgaven. I denne oppgaven vil du bruke kombinatorikk, tallteori og muligens også litt analyse. Oppgaven er delt i to. Förste delen tar for seg et problem som man ofte finner i *underholdningsmatematikken*, og som vanligvis er beskrevet som et problem med frimerker og konvolutter. I den andre delen skal du benytte resultater fra förste del til å konstruere effektive computer-nettverk av en viss type.

Notasjon. Små latinske bokstaver vil i denne oppgaven betegne hele tall, og det vil fremgå fra sammenhengen at noen av disse alltid er ≥ 0, mens andre alltid er > 0. Men i punkt 6 (og eventuelt også i punkt 13) kan det kanskje lönne seg å betrakte en av de variable som vilkårlig *reell* fremfor heltallig.

Videre, for et reelt tall α, betegner vi med $\lfloor \alpha \rfloor$ det största hele tall $\leq \alpha$, mens $\lceil \alpha \rceil$ betegner det minste hele tall $\geq \alpha$.

Frankering. I et land har man bare frimerker pålydende 1 krone og 5 kroner. Når en konvolutt har plass til höyst 4 frimerker, kan man frankere belöpene 0,1,2,3,4,5,6,7,8, mens 9 kan ikke frankeres. Vi setter $n_4(5) = 8$.

Mer generelt, hvis en konvolutt har plass til höyst h frimerker, la $n_h(5) + 1$ være det minste positive heltallige belöp som *ikke* kan frankeres. — Med $n = n_h(5)$, kan vi altså frankere belöpene $0, 1, \ldots,$ n, mens konvolutten kan ikke frankeres med belöpet $n + 1$.

1. Lag en tabell over funksjonsverdiene $n_h(5)$ for $h = 0, 1, \ldots, 8$.

2. Forsök å gjette deg til en formel for $n_h(5)$, gyldig for $h \geq 3$. — Bevis formelen.

Vi skifter nå ut frimerkeverdien 5 med vilkårlig heltallig verdi $a > 1$. Vi har altså nå frimerker med verdi 1 og verdi a, mens konvolutten har plass til höyst h frimerker. Det minste positive belöp som ikke kan frankeres betegner vi med $n_h(a) + 1$. — Med $n = n_h(a)$, kan vi altså frankere belöpene $0, 1, \ldots, n$, mens belöpet $n + 1$ ikke kan frankeres.

3. Gi en formel for $n_h(a)$, gyldig for $h < a - 1$.

4. Gitt et belöp m, kan konvolutten frankeres med dette belöpet? Vis at dette spörsmålet kan besvares slik: Foreta heltallsdivisjonen $m : a$. Dette gir oss da en kvotient q og en rest r,

$$m = qa + r \ , \qquad 0 \leq r < a.$$

Nå kan belöpet m frankeres hvis og bare hvis $q + r \leq h$.

5. Finn en formel for $n_h(a)$, gyldig for $h \geq a - 2$.

Vi antar nå at konvoluttstörrelsen i landet er fullstendig standardisert, og at en konvolutt har plass til höyst h frimerker. Fremdeles skal det bare være to gyldige frimerkeverdier. Men nå önsker myndighetene å velge disse frimerkeverdiene slik at vi kan få frankert et lengst mulig intervall av suksessive belöp $0, 1, \ldots, n$.

Idet den ene frimerkeverdien åpenbart må være 1, står vi nå overfor fölgende optimeringsproblem: Gitt h. Bestem $a_0 > 1$ slik at

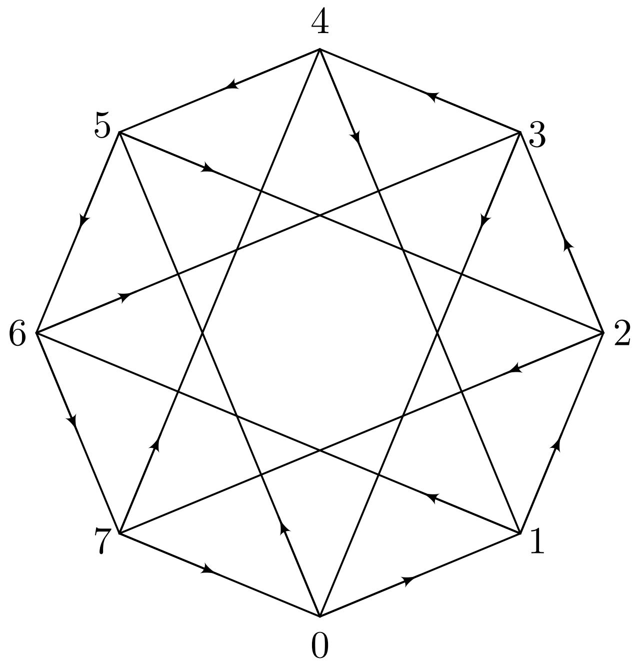
$$n_h(a_0) = \max_{a>1} n_h(a).$$

6. Lös optimeringsproblemet, og vis at

$$n_h(a_0) = \left\lfloor \frac{h^2 + 6h + 1}{4} \right\rfloor.$$

Computer-nettverk. Vi skal nå se på *double loop* computer-nettverk. Disse representerer en pålitelig og attraktiv nettverkarkitektur. Nettverk som dette forekommer gjerne i parallell-prosessor designs, og da særlig i såkalte multicomputere. I disse binder da nettverket sammen et stort antall mikroprosessorer, som har hvert sitt lokale minne.

Fölgende figur representerer et *double loop* computer-nettverk med 8 stasjoner. Stasjonene er nummererte med tallene $0, 1, \ldots, 7$.



Figur 1

I nettverket sendes det meldinger i pilenes retninger. Et krav til slike nettverk er at vi fra en vilkårlig stasjon kan sende meldinger (eventuelt via andre stasjoner) til enhver annen stasjon. Dette er oppfylt for nettverket over.

Nettverket i Fig.1 er satt sammen av to typer *kanter*: Fra stasjon nr. i har vi kantene

$$i \longrightarrow i+1 \qquad \text{og} \qquad i \longrightarrow i+5.$$

I denne beskrivelsen vil vi f.eks. for $i = 6$, ha kanten $6 \longrightarrow 6{+}5 = 11$. Men hvilken stasjon har nummeret 11? — På Fig.1 ser vi at dette må være stasjon nr. 3.

To tall i og j angir samme stasjon dersom differensen $i - j$ er et multiplum av 8. Vi sier i dette tilfellet at *i er kongruent med j modulo 8*. Vi kan således si at *stasjonsnumrene er angitt modulo 8*.

Vi kan sende meldinger mellom to stasjoner på flere måter. La oss si at vi på Fig.1 önsker å sende en melding fra stasjon 2 til stasjon 5. Noen muligheter er

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 2 & \to & 7 & \to & 4 & \to & 1 & \to & 6 & \to & 3 & \to & 0 & \to & 5, \\ & & & & 2 & \to & 3 & \to & 4 & \to & 5, & & & & \\ & & & & 2 & \to & 7 & \to & 0 & \to & 5. & & & & \end{array}$$

Der finnes også mange andre muligheter.

Avstanden $d(i,j)$ mellom de to stasjonene $i \neq j$, er det minste antall kanter man trenger å passere for å komme fra stasjon i til stasjon j. Naturlig nok setter vi også $d(i,i) = 0$.

7. Vis at $d(2,5) = 3$ for nettverket i Fig.1. — Hva blir $d(5,2)$?

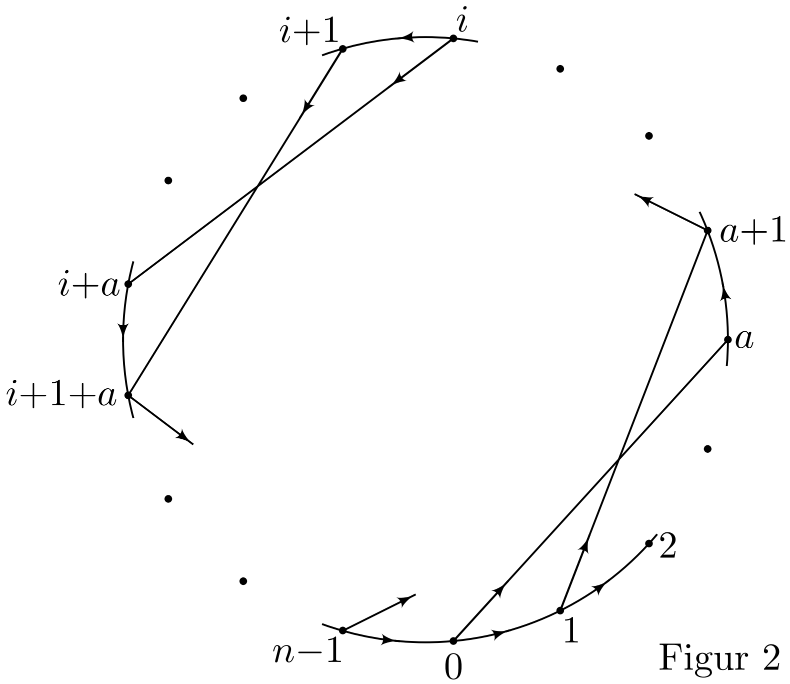
Diameteren $D_8(5)$ til nettverket over, er gitt som

$$D_8(5) = \max d(i,j)$$

hvor max taes over alle par i, j av stasjoner.

8. Bestem $D_8(5)$.

Vi går nå over til å se på den generelle situasjon med et *double loop* computer-nettverk med n stasjoner og *sprangavstand* a, $1 < a < n$. Vi kan antyde situasjonen ved fölgende figur:

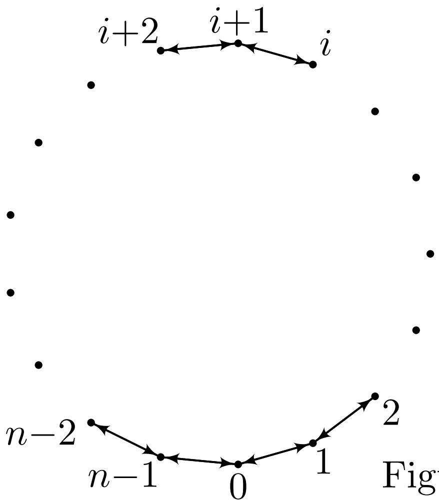


Figur 2

9. Forklar hva som nå menes med at *stasjonene er nummererte modulo n*. Definér også begrepene *avstanden* $d(i, j)$ *fra stasjon* i *til stasjon* j og *diameteren* $D_n(a)$ *til nettverket*.

Av et effektivt nettverk kreves det at diameteren er *liten*. Det gjelder altså å få den störste avstanden i nettverket minst mulig.

En vanlig *ingeniörlösning* som ikke er særlig god m.h.p. dette önsket, er å velge $a = n - 1$. Denne lösningen kan da tegnes slik:



Figur 3

hvor vi mellom en stasjon i og den påfölgende stasjon $i+1$ har en kant hvor meldingene kan sendes i begge retninger.

10. Bestem diameteren $D_n(n-1)$ til dette nettverket.

Vi skal nå benytte resultatene om frankering til å få frem bedre lösninger.

11. Bruk resultatet for $n_4(5)$ til å forklare at vi har $D_8(5) \leq 4$.

12. Forklar at hvis $n_h(a) \geq n-1$, så er $D_n(a) \leq h$.

13. Forsök nå å bruke resultatene om frankering til å finne en a_0 (uttrykt ved n), slik at

$$D_n(a_0) < 2\sqrt{n}.$$

14. For $n = 66 \uparrow 156$, sammenlign $D_n(n-1)$ fra punkt 10 med $D_n(a_0)$ fra punkt 13.

Det skulle nå være klart at svaret ditt under punkt 13 representerer en vesentlig forbedring av *ingeniörlösningen* under punkt 10.

Resultatet du fant under punkt 13 begynner faktisk å nærme seg det beste man i det hele tatt kan håpe på. Det går nemlig an å vise at vi alltid har

$$\min_{1<a<n} D_n(a) \geq \lceil \sqrt{3n}\, \rceil - 2.$$

Man kjenner visse uendelige klasser av tall n, for hvilke likhetstegnet gjelder. F. eks. gjelder dette når n er av formen $n = 3w(w+1)$.

15. Bruk dette til å bestemme $\min_{1<a<n} D_n(a)$ for $n = 66 \uparrow 156$.

16. Forsök å planlegge et bevis for at

$$D_n(3w+2) = 3w \qquad \text{når} \qquad n = 3w(w+1).$$

Det er et *ulöst problem* å bestemme lignende resultater for (minst) en a_0 med korresponderende $D_n(a_0)$, slik at

$$D_n(a_0) = \min_{1<a<n} D_n(a),$$

når n er et *vilkårlig* helt tall ≥ 1. — Så nå er du ved forskningsfronten!

Litteratur

Hwang, F.K. and Xu, Y.H., *Double loop networks with minimum delay.* Discrete Math. 66(1987), s 109–118.

Selmer, E.S., *To populære problemer i tallteorien* I. *Myntveksling.* Normat 29(1981), s 81–87.

Selmer, E.S., *To populære problemer i tallteorien* II. *Frankering.* Normat 29(1981), s 105–114.

Juni-nummeret for 1987 av bladet *Computer* er i sin helhet viet computer-nettverk. Noen av artiklene i dette bladet vil nok være vanskelige å forstå. Men den innledende artikkelen av L. N. Bhuyan og begynnelsen på artikkelen av D. A. Reed & D. C. Grunwald skulle du kunne lese. Hvis du har lyst å se eksempler på andre typer nettverk-arkitektur enn den vi har sett på i denne oppgaven, vil du finne slike i dette bladet. Du vil da finne det spesielt interessant å se nærmere på den mye benyttede *hyperkube*-arkitekturen.