Kampen om sista stickan

Krister Svanberg

KTH

1. Förberedande exempel. Tänk dig följande enkla spel mellan två spelare kallade A och B:

En hög med ett stort antal stickor läggs på ett bord. Spelare A börjar och får ta 1 eller 2 eller 3 stickor ur högen. Därefter är det B:s tur att ta 1 eller 2 eller 3 stickor ur högen, varefter det är A:s tur osv. Vi säger (influerade av schack-terminologin) att A får börja att ”göra ett drag”, varefter B ”gör ett drag” osv. Det är tillåtet att räkna stickorna på bordet innan man gör sitt drag.

Den spelare vinner som tar den sista stickan ur högen.

Fråga. Hur beter man sig för att vinna ett sådant spel?

Analys. En spelare som lämnar 0 stickor på bordet efter att ha gjort ett drag har vunnit, enligt reglerna ovan. Däremot kommer en spelare som lämnar kvar 1 eller 2 eller 3 stickor på bordet efter sitt drag att förlora, eftersom motspelaren då kommer att vinna med sitt nästa drag. En spelare som lämnar kvar 4 stickor på bordet kommer att vinna, eftersom motståndaren med sitt nästa drag tvingas lämna kvar 1 eller 2 eller 3 stickor på bordet. Däremot kommer en spelare som lämnar kvar 5 eller 6 eller 7 stickor på bordet att förlora, eftersom motspelaren då med sitt nästa drag kan se till att det blir 4 stickor kvar på bordet.

Sådär kan man fortsätta att resonera, och den slutsats man bör kunna dra är följande:

Sats 1: (= svaret på frågan ovan). *Den spelare som efter att ha gjort sitt drag lämnar kvar ett antal stickor som är jämnt delbart* *mer 4 (dvs 0 eller 4 eller 8 eller 12 osv) kommer att vinna spelet (om hon inte senare gör något allvarligt misstag förstås).*

Alternativt kan vi formulera Sats 1 på följande vis:

De ”tillstånd” man ska lämna efter sig för att vinna, s k ”V–tillstånd”, respektive de som leder till att man kommer att förlora (om man lämnar ett sådant efter sig), s k ”F–tillstånd”, ges av följande tabell:

V–tillstånd:	”0 stickor”,	”4 stickor”,	”8 stickor”,	...
F–tillstånd:	”1 sticka”,	”5 stickor”,	”9 stickor”,	...
	”2 stickor”,	”6 stickor”,	”10 stickor”,	...
	”3 stickor”,	”7 stickor”,	”11 stickor”,	...

Att bevisa Sats 1 (i den alternativa formuleringen med V– och F–tillstånd) kan gå till så här:

Antag att spelare A lämnar efter sig ett V–tillstånd (dvs ”0 stickor” eller ”4 stickor” osv). Då gäller antingen att A redan har vunnit (om det var ”0 stickor” hon lämnade efter sig) eller också måste spelare B med sitt nästa drag lämna efter sig ett F–tillstånd, eftersom det *inte* går att komma från ett V–tillstånd till ett annat V–tillstånd med *ett* drag. Men om B lämnar efter sig ett F–tillstånd, kan A med sitt nästa drag lämna efter sig ett V–tillstånd, eftersom det från *varje* F–tillstånd går att komma till ett V–tillstånd med *ett* drag.

Om A en gång har lämnat efter sig ett V–tillstånd, så kommer hon alltså att kunna fortsätta att bara lämna V–tillstånd efter sig (tills spelet är slut), medan stackars B hela tiden tvingas lämna F–tillstånd efter sig.

Antalet stickor på bordet minskar strikt vid varje drag. Alltså kommer spelet förr eller senare att ta slut, och segrare blir den som lämnar efter sig V–tillståndet ”0 stickor”. Eftersom B hela tiden tvingas lämna efter sig F–tillstånd kan det inte vara B som vinner.

Alltså vinner A.

2. Ett svårare spel. Ovanstående var förberedelser till det spel vi ska ägna oss åt fortsättningsvis.

Liksom ovan deltar två spelare, kallade A och B.

Minst 2 högar med stickor läggs ut på bordet (t ex 5 högar med respektive 12, 7, 9, 14 och 6 stickor).

Den ene spelaren, säg A, börjar och får ta hur många stickor hon vill ur en och endast en hög. Hon får ta ur vilken hög som helst och hur många stickor som helst, dock minst 1 sticka och högst hela det antal stickor som finns i den hög hon väljer att ta ur.

Därefter är det B:s tur att göra motsvarande, osv.

Det är tillåtet att räkna stickorna i de olika högarna innan man gör sitt drag.

Den spelare som tar den sista stickan från bordet vinner.

3. Specialarbetet. Specialarbetet går ut på att du skall resonera dig fram till hur man beter sig för att vinna nyss beskrivna spel.

Lämpligen sker detta genom följande steg:

(i) Spela spelet några gånger med kamrater, tills du fått litet känsla för det. Till att börja med kan det räcka med att man startar med 2 högar. Därefter kan man utvidga till 3 högar osv.

(ii) Antag att man startar spelet med två högar. Resonera i analogi med ovan (avsnitt 1) och försök lista alla V–tillstånd och F–tillstånd. Ledning: Representera tillstånden med två tal (x, y), där $x =$ antal stickor i hög 1 och $y =$ antal stickor i hög 2. Då är exempelvis $(1, 1)$ ett V–tillstånd medan $(2, 1)$ är ett F–tillstånd, eller hur?

(iii) Antag nu att man startar spelet med tre högar. Representera tillstånden med tre tal (x, y, z) och försök lista alla V– och

F–tillstånd. $(1,1,1)$ är ett F–tillstånd, medan exempelvis $(3,2,1)$ är ett V–tillstånd, eller hur?

(iv) Fortsätt med 3–högarsfallet och försök hitta någon regel för när ett tillstånd (x,y,z) är ett V–tillstånd.
Ledning: Binärutveckla x,y och z, dvs uttryck x,y och z med hjälp av enbart 0:or och 1:or i talsystemet med basen 2.
Exempel: $(9,12,7) = (1001,1100,111)$.

(v) Undersök om den regel du (förhoppningsvis) upptäckte under steg (iv) ovan gäller även om man har fler än 3 högar.

(vi) Formulera en metod att vinna spelet.

(vii) Bevisa att din spelmetod fungerar. Använd lämpligen ett resonemang i analogi med det som användes i beviset av Sats 1 ovan.

(viii) (Frivilligt) Programmera upp din metod på en liten dator och låt dina kamrater, och din mattelärare, försöka slå programmet.

Lycka till!